B9 (повышенный уровень, время – 3 мин)

Тема: Графы. Поиск путей

Что нужно знать:

- если в город R можно приехать только из городов X, Y, и Z, то число различных путей из города A в город R равно сумме числа различных путей проезда из A в X, из A в Y и из A в Z, то есть

  $$N_R = N_X + N_Y + N_Z,$$

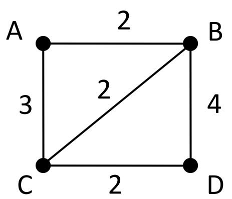
  где N_Q обозначает число путей из вершины A в некоторую вершину Q
- число путей конечно, если в графе нет циклов – замкнутых путей

Ещё пример задания:

На карту нанесены 4 города (A, B, C и D). Известно, что
между городами A и C – три дороги
между городами C и B – две дороги
между городами A и B – две дороги
между городами C и D – две дороги
между городами B и D – четыре дороги
По каждой из этих дорог можно ехать в обе стороны. Сколькими различными способами можно проехать из города A в город D, посещая каждый город не более одного раза?

Решение:

1) нарисуем граф, в котором множественные дороги из одного города в другой будем обозначать одной дугой и подписывать около неё количество дорог:



2) выпишем все маршруты, по которым можно ехать из A в D так, чтобы дважды не проезжать один и тот же город:

   $A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} D$ $A \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} D$ $A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{2} D$ $A \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} D$

3) теперь рассмотрим маршрут $A \to B \to D$; сначала можно двумя путями приехать из A в B, а затем – 4-мя путями из B в D; поэтому общее количество различных маршрутов равно произведению этих чисел: 2*4 = 8
4) аналогично находит количество различных путей по другим маршрутам

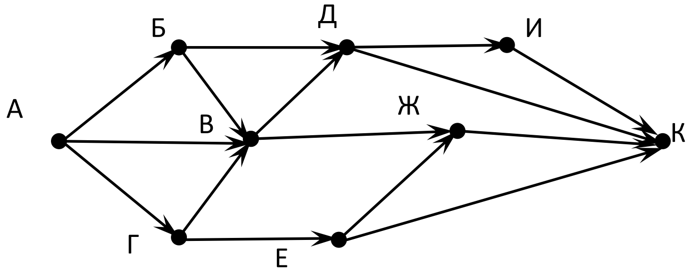
   $A \to C \to D$: 3*2 = 6

   $A \to B \to C \to D$: 2*2*2 = 8

   $A \to C \to B \to D$: 3*2*4 = 24
5) всего получается 8 + 6 + 8 + 24 = 46.
6) Ответ: 46.

Пример задания:

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



Решение (1 вариант, подстановки):

7) начнем считать количество путей с конца маршрута – с города К
8) будем обозначать через N_X количество различных путей из города А в город Х
9) общее число путей обозначим через N
10) по схеме видно, что $N_Б = N_Г = 1$
11) очевидно, что если в город Х можно приехать только из Y, Z, то $N_X = N_Y + N_Z$, то есть нужно сложить число путей, ведущих из А во все города, откуда можно приехать в город Х
12) поскольку в К можно приехать из Е, Д, Ж или И, поэтому
    $N = N_К = N_Д + N_Е + N_Ж + N_И$
13) в город И можно приехать только из Д, поэтому $N_И = N_Д$
14) в город Ж можно приехать только из Е и В, поэтому
    $N_Ж = N_Е + N_В$
15) подставляем результаты пп. 6 и 7 в формулу п. 5:
    $N = N_В + 2N_Е + 2N_Д$
16) в город Д можно приехать только из Б и В, поэтому
    $N_Д = N_Б + N_В$
    так что
    $N = 2N_Б + 3N_В + 2N_Е$
17) в город Е можно приехать только из Г, поэтому $N_Е = N_Г$ так что
    $N = 2N_Б + 3N_В + 2N_Г$
18) по схеме видно, что $N_Б = N_Г = 1$, кроме того, $N_В = 1 + N_Б + N_Г = 3$
19) окончательно $N = 2N_Б + 3N_В + 2N_Г = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 13$
20) Ответ: 13.

Решение (2 вариант, удобная форма записи):

1) начнем считать количество путей с конца маршрута – с города К
2) записываем для каждой вершины, из каких вершин можно в нее попасть
    К ← ИДЖЕ
    И ← Д
    Ж ← ВЕ
    Е ← Г
    Д ← БВ
    Г ← А
    В ← АБГ
    Б ← А
3) теперь для удобства «обратного хода» вершины можно от-

вершина	откуда?
К	ИДЖЕ
И	Д
Ж	ВЕ
Е	Г
Д	БВ
Г	А
В	АБГ
Б	А

сортировать так[1], чтобы сначала шли все вершины, в которые можно доехать только из начальной точки А:

Б ← А

Г ← А

затем на каждом шаге добавляем те вершины, в которые можно доехать из уже добавленных в список (и из исходной точки):

В ← АБГ

Е ← Г

далее добавляем все вершины, куда можно доехать из А, Б, Г, В и Е:

Д ← БВ

Ж ← ВЕ

на следующем шаге добавляем вершину И

И ← Д

и, наконец, конечную. вершину

К ← ИДЖЕ

именно в таком порядке мы и будем вычислять количество путей для каждой вершины

вершина	откуда?	N
Б	А	1
Г	А	1
В	АБГ	3
Е	Г	1
Д	БВ	4
Ж	ВЕ	4
И	Д	4
К	ИДЖЕ	13

4) теперь идем по полученному списку вершин, полагая, что количество вариантов попасть в вершину равно суммарному количеству вариантов попасть в ее непосредственных предшественников.

$N_Б = 1$, $N_Г = 1$

$N_В = 1+1+1 = 3$, $N_Е = 1$

$N_Д = 1+3 = 4$, $N_Ж = 3 + 1 = 4$

$N_И = 4$,

$N = N_К = 4 + 4 + 4 + 1 = 13$

5) заметим, что вершины можно и не сортировать специально, а просто выбирать возможный порядок вычисления: проверять, какие значения известны и какие можно рассчитать с их помощью на следующем шаге

6) Ответ: 13.

Возможные ловушки и проблемы:

- очень важна аккуратность и последовательность; сначала идем от конечной точки к начальной, выписывая все вершины, из которых можно приехать в данную; затем идем обратно, определяя числовые значения
- построение полного дерева маршрутов – занятие трудоемкое и достаточно бесперспективное, даже грамотные учителя информатики здесь в большинстве случаев что-то забывают и ошибаются

Решение (3 вариант, перебор вершин по алфавиту):

1) Запишем вершины в алфавитном порядке и для каждой из них определим, из каких вершин можно в нее попасть

Б ← А

В ← АБГ

Г ← А

Д ← БВ

Е ← Г

вершина	откуда?
Б	А
В	АБГ
Г	А
Д	БВ
Е	Г
Ж	ВЕ
И	Д
К	ИДЖЕ

[1] Такая процедура называется *топологической сортировкой графа*.

Ж ← ВЕ
И ← Д
К ← ИДЖЕ

2) теперь определяем количество путей; сначала ставим 1 для тех вершин, в которые можно проехать только из начальной (А):

вершина	откуда?	N
Б	А	1
В	АБГ	
Г	А	1
Д	БВ	
Е	Г	
Ж	ВЕ	
И	Д	
К	ИДЖЕ	

3) затем на каждом шаге добавляем те вершины, в которые можно доехать из уже добавленных в список (и из исходной точки):

вершина	откуда?	N
Б	А	1
В	АБГ	3
Г	А	1
Д	БВ	
Е	Г	1
Ж	ВЕ	
И	Д	
К	ИДЖЕ	

4) следующий шаг

вершина	откуда?	N
Б	А	1
В	АБГ	3
Г	А	1
Д	БВ	4
Е	Г	1
Ж	ВЕ	4
И	Д	
К	ИДЖЕ	

5) и последние 2 шага

вершина	откуда?	N
Б	А	1
В	АБГ	3
Г	А	1
Д	БВ	4
Е	Г	1
Ж	ВЕ	4
И	Д	4
К	ИДЖЕ	13

6) Ответ: 13.

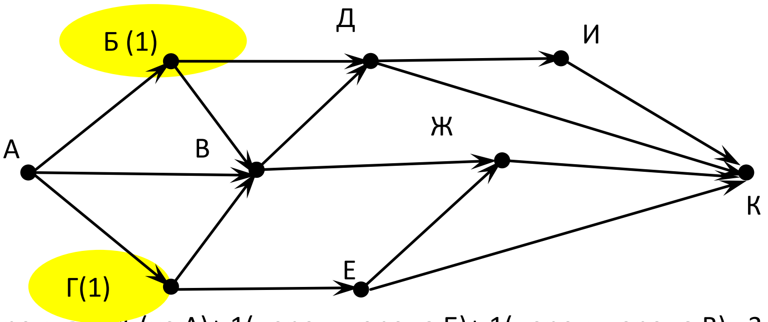
Решение (4 вариант, перебор всех путей с начала, А. Яфарова):

1) запишем все вершины, в которые есть прямой путь из вершины А: Б, В и Г; получается три начальных отрезка:
   АБ, АВ, АГ
2) рассмотрим маршрут АБ: из Б можно ехать в В и Д, поэтому получаем два маршрута:
   АБ***В***, АБ***Д***
3) рассматриваем конечные точки этих маршрутов: из В можно ехать в Д и Ж, а из Д – в И и К:
   АБВ***Д***, АБВ***Ж***, АБД***И***, АБД***К***
4) снова смотрим на конечные точки: из Д едем в И и К, из Ж и И – только в К:
   АБВД***И***, АБВД***К***, АБВЖ***К***, АБДИ***К***, АБДК
5) из И едем только в К, таким образом, все возможные маршруты, содержащие участок АБ, доведены до конечной точки К, всего **5 таких маршрутов**:
   АБВДИ***К***, АБВДК, АБВЖК, АБДИК, АБДК
6) затем аналогично рассматриваем маршруты, которые начинаются с АВ:
   АВД, АВЖ
   АВДИ, АВДК, АВЖК
   АВДИК, АВДК, АВЖК
   всего **3 маршрута**
7) наконец, остается рассмотреть маршруты, которые начинаются с АГ:
   АГВ, АГЕ
   АГВД, АГВЖ, АГЕЖ, АГЕК
   АГВДИ, АГВДК, АГВЖК, АГЕЖК, АГЕК
   АГВДИК, АГВДК, АГВЖК, АГЕЖК, АГЕК
   всего **5 маршрутов**
8) складываем количество маршрутов для всех начальных участков: 5 + 3 + 5 = 13
9) Ответ: 13.

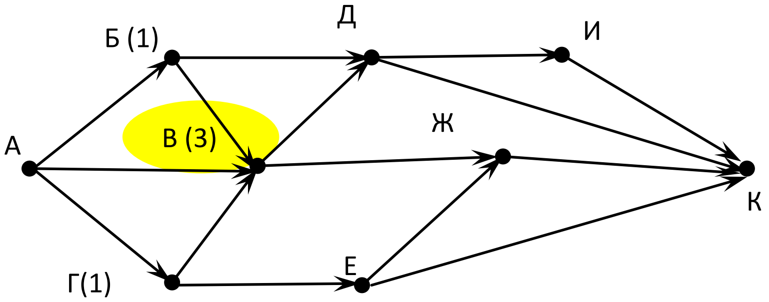
Возможные проблемы:
- при большом количестве маршрутов легко запутаться и что-то пропустить

Решение (5 вариант, графический, О.О. Грущак, КузГПА):

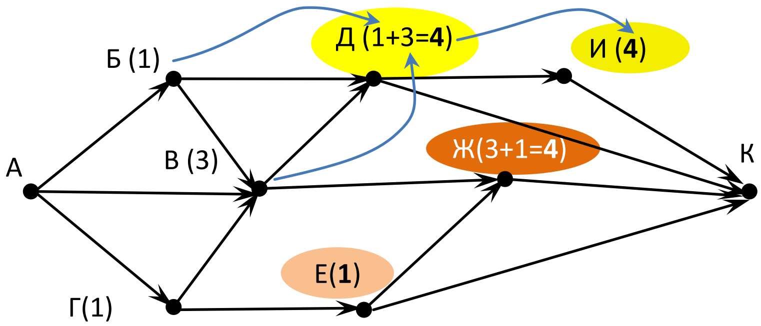
1) Главную идею решения: (число дорог в город N есть сумма дорог, приводящих в города, из которых есть прямой проезд в город N), отразим на самой схеме, показывая на ней ЧИСЛО ДОРОГ, приводящих в каждый город.
2) Последовательность очевидна: начинаем с Б и Г (городов, куда есть по 1-й дороге из А)



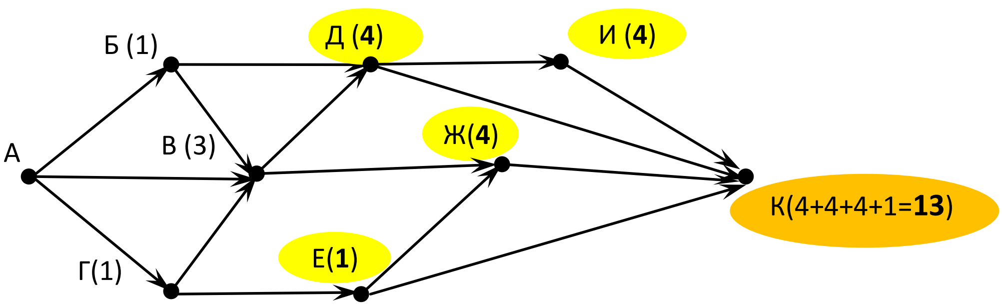
3) Посчитаем дороги в В: 1 (из А)+ 1(дороги города Б)+ 1(дороги города В)= 3



4) Аналогично посчитаем дороги в Д, И, Е, Ж:



5) Определяем число дорог в город К, как сумму дорог в города, с которыми он связан: Д, И, Ж, Е.



6) Ответ: 13.